

Objetivos para Esse Capítulo

1. Conhecer a definição de um vetor no Maple
2. Use os componentes de um vetor como um meio de resolver problemas de vetor
3. Conhecer os métodos de adição e subtração de vetores
4. Definir produto escalar (produto $\bullet$) e produto vetorial (produto $\times$)
5. Usar o produto escalar e o produto vetorial para derivar as leis de cosseno e seno

Comandos Maple Usados Nesse Capítulo

<code>evalf(angle(C, A));</code>	Encontra o ângulo entre dois vetores (geralmente requer <i>evalf</i>).
<code>evalm(A + B)</code>	Avalia o resultado de um vetor (similar ao <i>evalf</i>)
<code>norm(A, 2)</code>	Calcula a extensão de um vetor de seus componentes.
<code>with(linalg)</code>	Carrega o pacote que contém funções vetoriais.
<code>vector([Ax, Ay])</code>	Define um vetor com componentes A_x e A_y .
<code>Linalg[dotprod](A, B)</code>	Calcula o produto escalar de vetores A e B sem carregar <i>linalg</i> .

O Conceito de um Vetor

John Wallis (1616 – 1703) foi o primeiro a tentar representar a solução “imaginária” de uma equação quadrática. Ele escolheu medir a parte real da solução ao longo do eixo de x e a parte imaginária ao longo do eixo de y . Esse passo foi rejeitado por um século, quando se popularizou através do norueguês Caspar Wessel (1745 – 1818) e pelo matemático francês J. R. Argand. A construção se completou iniciando na origem de um sistema de coordenadas (x, y) em direção a uma distância, x , ao longo do eixo real, e acima de uma distância, y , em direção perpendicular a x (Figura 7.1).

Levou muito tempo para os matemáticos entenderem que os vetores poderiam ser definidos sem registrá-los em números complexos. Por exemplo, os vetores que nós iremos definir neste capítulo contêm apenas números reais. Eles são úteis porque expressam conceitos poderosos em uma simples notação. Eles são extensivamente usados em física, mecânica e engenharia.

O vetor $\vec{A}$ é definido como a *linha direta* OP que acompanha a origem, O , para o ponto $P(x, y)$.

Você pode ver nessa definição que o vetor $\vec{A}$ não é nada mais do que a hipotenusa familiar do triângulo reto contendo x e y , com um senso de direção incluído.

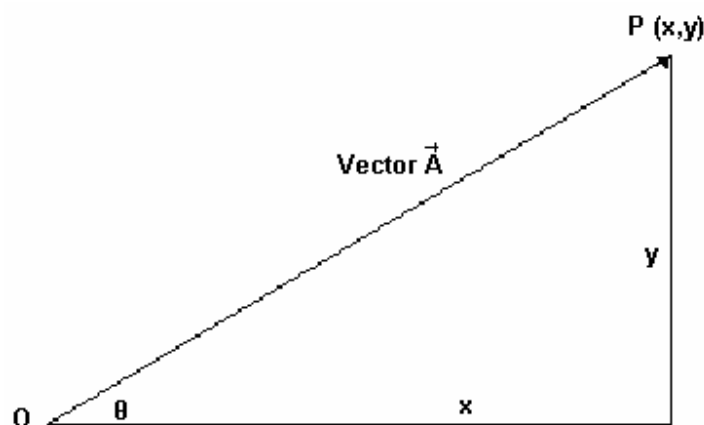


Figura 7.1 A Definição de um Vetor

Você acha que a linha OP vai de O para P . (Você verá que a linha vai em outra direção, de P para O , isto é chamado $-\vec{A}$.)

Vetores são especialmente usados na Física, onde eles representam diretamente quantidades, como força ou deslocamento, de uma forma natural. Já que os vetores estão próximos à Trigonometria, eles irão ser discutidos aqui.

Nós precisamos de alguma terminologia que esteja apta a falar sobre as partes de um vetor. O *ponto inicial*, ou o ponto onde o vetor se inicia, é o ponto O . Também chamado de *extremidade* (tail) do vetor. O *ponto terminal* é o ponto onde o vetor termina. Esse ponto é chamado *final* (tip). O final de um vetor é desenhado com uma pequena seta para que a direção do vetor fique clara. A direção do vetor vai *da* extremidade *para* o final (Figura 7.1). Os *componentes* de um vetor são as extensões x e y . O ângulo do vetor com o eixo de x é θ . A *extensão* do vetor é o comprimento da hipotenusa, independente da sua direção. A extensão de $\vec{A}$ é denotada por $|\vec{A}|$. Nós podemos registrar a extensão do vetor $|\vec{A}|$ para a extensão dos seus componentes horizontais e verticais usando as definições trigonométricas básicas de seno e cosseno.

$$x = |\vec{A}| \cos(\theta) \text{ (o componente } x \text{ do vetor } \vec{A}) \quad (7-1a)$$

$$y = |\vec{A}| \sin(\theta) \text{ (o componente } y \text{ do vetor } \vec{A}) \quad (7-1b)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7-1c)$$

Adição de Dois Vetores

A adição de dois vetores é melhor pensada da “extremidade para o final”. Você localizou a extremidade do primeiro vetor, $|\vec{A}|$, na origem, O . Então você colocou a extremidade do vetor

$\vec{B}$ no final do vetor $\vec{A}$, mantendo seu próprio ângulo com o eixo de x . A soma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ é a linha de O para P_2 . A Figura 7.2 mostra a construção geométrica para a soma dos dois vetores.

O diagrama mostra a facilidade de adicionar dois vetores matematicamente se você conhece seus componentes. Digamos que x_3 e y_3 são os componentes de $\vec{C}$. Nesse caso, $x_3 = x_1 + x_2$ e $y_3 = y_1 + y_2$. Já que você sabe os componentes de um vetor, fica fácil relacioná-los. Novamente aplicamos as definições trigonométricas básicas:

$$|\vec{C}| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2)} \quad (7 - 2a)$$

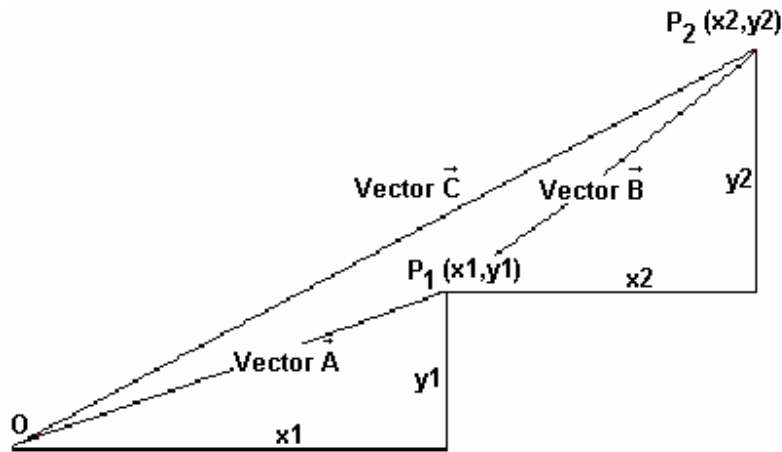


Figura 7.2 A Soma de Dois Vetores

O ângulo θ que $\vec{C}$ faz com o eixo de x seja encontrado pela equação:

$$\tan(\theta) = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \quad (7 - 2b)$$

Um vetor pode ser especificado em termos de *unidade de vetores*. O vetor $\mathbf{i}$ é a unidade de vetor na direção de x , e o vetor $\mathbf{j}$ é a unidade de vetor na direção y . O vetor $x\mathbf{i}$ está na mesma direção de $\mathbf{i}$. O número x é chamado escalar. O processo de multiplicação de um vetor por um número real é

chamado *multiplicação escalar*. Portanto, se x_1 e y_1 são os componentes x e y de um vetor $\mathbf{A}$, então $\mathbf{A} = i x_1 + j y_1$. (A partir de agora, neste capítulo, nós iremos denotar os vetores com letras em negrito, omitindo a seta acima da letra.) Qualquer vetor pode ser escrito como uma soma dos seus componentes x e y . Isso é especialmente importante, porque nos dá um simples modo de adicionar dois vetores. Entenda que dois vetores, ambos no eixo de x , terão uma soma, a qual permanecerá ao longo do eixo de x . A extensão da *resultante* será a soma das extensões individuais. Vamos chamar as duas quantidades de $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Já que esses vetores estão ao longo do eixo de x , elas podem ser representadas como $\mathbf{p} = ip$ e $\mathbf{q} = iq$. Consequentemente, $\mathbf{p} + \mathbf{q} = ip + iq = i(p + q)$.

Já que os vetores estando orientados na mesma direção podem ser adicionados como números, nós podemos adicionar dois vetores quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ adicionando junto os componentes de x , e então os de y . Fazendo $A_x = x_1, A_y = y_1, B_x = x_2, B_y = y_2$, nós temos:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j}. \quad (7-3)$$

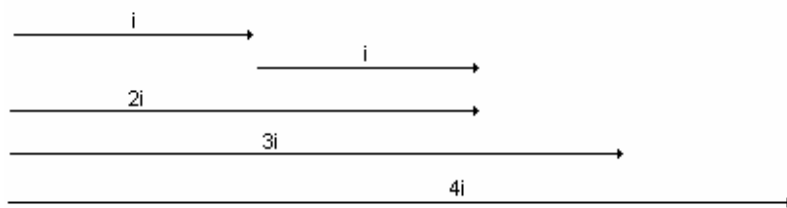


Figura 7.3 Adicionando Vetores Unidirecionais

A figura 7.3 mostra a unidade de vetor $\mathbf{i}$ e algum dos seus múltiplos escalares. A unidade de vetor é mostrada duas vezes pra lembrar você de que um vetor pode ser movido da origem e ainda ser considerado o mesmo vetor. O ponto de iniciação para a extremidade de um vetor é imaterial: apenas seu comprimento e direção são importantes. Os Múltiplos Escalares de $\mathbf{i}$ estão todos na mesma direção, a qual é aquela de $\mathbf{i}$.

Vetores podem ser subtraídos adicionando-se a negativa de um vetor. A diferença do vetor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é definida como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. A negativa de um vetor é encontrada simplesmente revertendo a sua direção. Trocando a extremidade e o final, você tem a negativa do vetor original.

O Produto • (Dot) de Dois Vetores

Você tem visto que os vetores podem ser adicionados e subtraídos, mas não é óbvio como a multiplicação de dois vetores deve ser definida. Têm sido encontradas utilidades para definir dois diferentes meios de multiplicar vetores. A primeira delas é chamada *produto dot* (•). O produto dot é representado por $A \cdot B$,

$$A \cdot B = |A||B|\cos(\theta), \quad (7-4)$$

onde θ é o ângulo entre A e B .

A Figura 7.4 mostra o diagrama para o produto dot de dois vetores, A e B . O produto dot é uma quantidade *escalar*. Esse modo de multiplicar dois vetores produz um número, não um vetor. A razão dessa definição é menos útil. Muitas ocorrências físicas podem ser descritas em termos de produto dot. O conhecimento mais comum disso é a ação de uma força em um objeto móvel. O *trabalho feito* pela força é igual ao produto dot da força e a distância movida.

$$W = F \cdot x \cos(\theta) \quad (7-5)$$

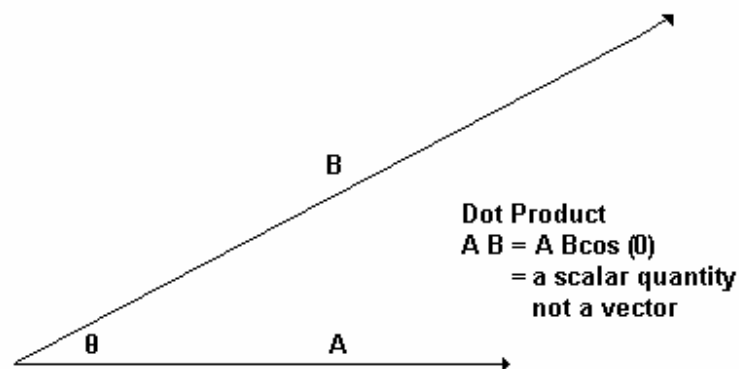


Figura 7.4 O Produto Dot

A fórmula do produto dot é fácil de trabalhar se os vetores são expressos em forma de componentes. A razão é a simples regra de tirar o produto dot da unidade de vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (7-6)$$

Esses resultados seguem diretamente da definição do produto dot. Se dois vetores estão na mesma direção, como $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, o ângulo entre eles é 0. O coseno de 0 é 1, então as extensões dos vetores são multiplicadas. Se os vetores estão em ângulos retos para um outro, como $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, o ângulo entre eles é 90° , e o $\cos(90) = 0$. A Equação 7-7 segue imediatamente. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são dois vetores quaisquer, nós os expressamos em forma de componentes para encontrar o produto dot.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}) \\ &= A_x B_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + A_y B_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_y B_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= A_x B_x + A_y B_y \end{aligned} \quad (7-7)$$

A fórmula do produto vetorial dot pode ser generalizada em muitas dimensões. Já que a rotina do Maple para a manipulação de vetores é projetada para incluir o caso geral, isso impõe um pouco de complexidade.

O vetor usa o pacote *linalg* para definir um grande número de operações vetoriais. De fato, o pacote *linalg* no Maple define muito mais operações do que nós temos usado nesse livro. Se a máquina que você está trabalhando tem muita memória, você pode carregar esse pacote. (O comando load para carregar o pacote *linalg*). Depois de carregá-lo, você pode adicionar e subtrair dois vetores e você pode calcular os produtos dot e cross. Se você tem pouca memória, pode ainda usar os comandos de que precisa. Tudo isso custa um pouco mais de digitação. Por exemplo, para calcular o produto dot de dois vetores, você pode defini-lo como demonstrado, e então ativar o comando *linalg[dotprod](A, B)*;. Apenas a rotina *dotprod* é carregada, não o pacote *linalg*.

>with (linalg):

> A := vector([Ax, Ay]);

$$\mathbf{A} := [A_x \ A_y] \quad (7-8)$$

```
> B := vector( [Bx, By]);
```

```
B := [ Bx By] (7 – 9)
```

```
>linalg[dotprod](A, B);
```

```
AxBx + AyBy ( 7 – 10)
```

Exemplo 7 –1: Algumas Operações Vetoriais

Se $\vec{A} = 25i + 35j$, e $\vec{B} = 15i - 10j$, encontre $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$ e $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Solução. Defina os vetores no Maple depois de carregar o pacote *linalg*.

```
>with(linalg)
```

Warning, new definitions for norm

Warning, new definitions for trace

```
> A := vector([25, 35]); B := vector([15,-10]);
```

```
A := vector([ 25, 35] )
```

```
B := vector([ 15, -10] )
```

```
>evalm(A+B);
```

```
[ 40, 25]
```

```
>evalm(A-B);
```

```
[ 10, 45]
```

```
>evalm(A, B);
```

Exemplo 7 – 2: Adição de Vetores Quando as Extensões e os Ângulos são Dados

Nós iremos usar a notação **B** em θ para indicar a extensão e a direção de um vetor. Essa é equivalente aos componentes dados x e y , já que uma forma pode ser transformada em outra, usando a trigonometria do triângulo reto. Quando nós usamos essa notação, θ é o ângulo que o vetor faz com o eixo de x . Portanto, um vetor cujos componentes são **B** = [1, 1] pode ser escrito como $B = \sqrt{2}$ em 45° .

Se **A** = 10 em 30° e **B** = 15 em 45° , encontre **A + B**, **A – B**, e **A · B**.

Converta os vetores para a forma retangular como segue:

```
> A := vector( [ 10*cos(30), 10*sin(30)] ); B :=vector( [15*cos(45), 15*sin(45)] );
```

```
A := [ 8.660254040, 5.000000000]
```

```
B := [ 10.60660172, 10.60660172]
```

```
> evalm(A + B); evalm(A – B); dotprod(A, B);
```

```
[ 19.26685576, 15.60660172]
```

```
[ -1.946347680, -5.606601720]
```

```
144.8888740
```

Observe que a definição de seno, cosseno, e tangente que nós estamos usando aqui são convertidos em todos os ângulos para aproximações decimais. Nós podemos ter usado uma definição dessas funções que obtêm valores exatos para os ângulos simples desejados.

Sua Vez. Dado **A** = [17.5, -33.2] e **B** = [-17.5, 33.2], encontre **A + B**, **A – B**, e **A · B**.

A + B = _____

A – B = _____

A · B = _____

Exemplo 7 - 3

O ângulo entre vetores **A** e **B** é 20° , e as extensões de **A** e **B** são 135 e 225, respectivamente. Vetor **A** permanece ao longo do eixo positivo de x e **B** permanece sobre **A**. Encontre **A + B**, **A - B** e **A · B**.

Solução. Dadas as orientações dos vetores, nós podemos designar componentes para cada vetor. Já que **A** permanece no eixo de x , seu componente y é 0.

```
> A := vector([135, 0]); B := vector([225*cos(20), 225*sin(20)]);
```

```
A := [135, 0]
```

```
B := [ 211.4308397, 76.95453224]
```

```
> evalm(A + B); evalm(A - B); dotprod(A, B);
```

```
[346.4308397, 76.95453224]
```

```
[-76.4308397, -76.95453224]
```

```
28543.16336
```

Sua Vez. Dados **A** = 720 em 15° e **B** = 490 em -15° , encontre **A + B**, **A - B** e **A · B**.

A + B = _____

A - B = _____

A · B = _____

A Lei do Coseno

Uma vez que o produto dot foi definido e suas propriedades entendidas, é fácil provar uma generalização do Teorema de Pitágoras. Digamos que um triângulo tem os lados a , b e c . Você deve ter um triângulo reto se você quiser usar a fórmula,

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (7-11)$$

mas se o triângulo não contém nenhum ângulo reto, tal como o mostrado na Figura 7.5?

Digamos que θ seja o ângulo exterior entre os lados **A** e **B**. O ângulo θ é, portanto, o ângulo entre **A** e **B**, então nós podemos aplicar a fórmula do produto dot diretamente. Expresse os três lados do triângulo como vetores **A**, **B** e **C**. Portanto, nós temos a relação vetorial:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (7-12)$$

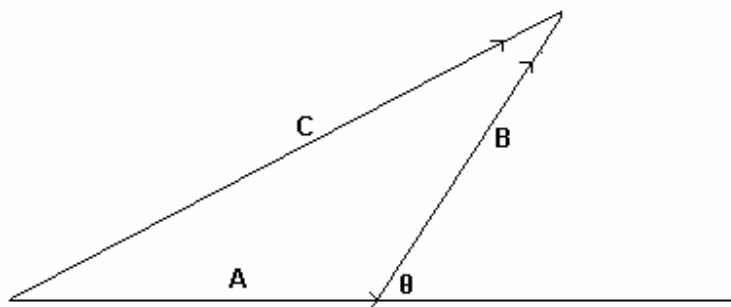


Figura 7.5 Diagrama para Derivação da Lei do Coseno

Pegue o produto de **C** e aplique as regras para manipulação de vetores **A + B**.

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$C^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta) \quad (7-13)$$

A Equação 7-13 é chamada *lei do coseno*. Observe que o ângulo θ é o ângulo exterior do triângulo e também o ângulo entre **A** e **B**, como requerida pela definição do produto dot. Essa fórmula permite a você encontrar o terceiro lado do triângulo se você conhece os dois lados e o ângulo incluído – o ângulo entre os lados. O ângulo exterior é encontrado subtraindo-se o ângulo incluído de 180° (ou 2π , se você está trabalhando com radianos).

Exemplo 7 – 4

Use a Figura 7.5 com $A = 45.5$, $B = 27.3$, e $\theta = 1$ radiano para encontrar o lado C .

Solução. $C = A + B$ e

```
> with (linalg);
```

```
> A := vector([45, 0]); B := vector([27.3*cos(1), 27.3*sin(1)]);
```

```
A := [ 45, 0]
```

```
B := [ 27.3 cos (1), 27.3 sin (1)]
```

```
>C := evalm(A + B); (Since A and B são vetores e eles somam para C, isso é tudo o que nós temos para fazer.)
```

```
C := [59.75025295, 22.97215789]
```

Compare a solução trigonométrica: $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta) = 45.5^2 + 27.3^2 + 2(45.5)(27.3)\cos(1)$. Esse método produz um valor para C de 64. Como comparar o valor de C que nós encontramos usando Maple para esse? Em outras palavras, como converter C na forma retangular para uma extensão? Uma maneira é usar o comando *norm*. A forma do comando que nós usamos é:

```
> norm(C, 2);
```

```
64.01416067
```

Observe que temos menos trabalho para encontrar o ângulo que C faz com o eixo de x . A solução dos vetores carrega com ela a informação sobre o ângulo, já que os componentes x e y são parte da solução. Quando você usa a solução de vetores, encontrando a extensão de C é necessário mais trabalho. É por isso que é preciso conhecer mais de um método.

Você pode usar:

```
>evalf(angle(C, A));
```

.3670468592

para encontrar o ângulo entre C e A . Geralmente, *evalf* converte a resposta para a forma decimal.

Exemplo 7 – 5

Dados os vetores $\mathbf{A} = [16, 7]$ e $\mathbf{B} = [2, 11]$, encontre o ângulo θ entre eles.

Soluções. O produto dot de dois vetores envolve o coseno do ângulo entre eles. Nós iremos usar a equação 7 – 4. Nossa tarefa é expressar as extensões de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ usando os comandos Maple e então formar o comando que registra o ângulo e graus. Você viu como nós usamos a “função de uma função” aproximadamente para chegar a um comando final?

```
> with(linalg)
```

```
> A := vector([16, 7]); B := vector([2, 11]);
```

```
> thetha = evalf(180/Pi*arccos( dot prod(A, B)/(norm(A, 2)*norm(B, 2)) ));
```

$\theta = 56.06577576$

Nós iremos checar as respostas usando o comando maple para encontrar o ângulo entre dois vetores.

```
> thetha = evalf(angle(A, B)*180/Pi);
```

$\theta = 56.06577578$

Observe que as respostas diferem na última casa decimal. Duas aproximações diferentes produzem duas respostas diferentes. Isso é normal em um trabalho numérico.

Sua Vez. Use a definição do produto cross($\times$) para calcular o seno do ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e dê uma olhada no arcsine para encontrar θ .

Resposta: Comando Maple: _____

Ângulo θ : _____

A sua resposta confere com o resultado do Exemplo 7 – 5?

Resposta: _____

O Produto Cross do Vetor

Nós estamos interessados em apenas alguns fatos selecionados sobre o vetor do produto cross. Esse é realmente um tópico para álgebra linear, então nós iremos nos contentar em defini-lo e usar estas definições para derivar uma regra de resoluções de triângulos baseado na função seno. Vetores são objetos tri-dimensionais, mas nós iremos nos manter no x, y planos, já que essa é a superfície na qual a trigonometria é feita. O produto do vetor cross irá requerer o que nós consideramos o eixo de z , mas apenas de um modo superficial. Esse método de multiplicações de vetores tem um vetor como resultado. O produto cross de um vetor **A** com um vetor **B** produz um vetor **C** cuja extensão é $A\sin(\theta)$, onde θ é o ângulo que gira **A** em **B** do modo mais eficiente possível (que é, através do menor número de graus). A definição do produto do vetor cross é mais complicada do que a fórmula do produto dot e precisa de mais explicações. O produto cross é escrito assim

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\theta) \quad (7-14)$$

A primeira parte da equação 7 –14 mostra como o produto cross é representado, e a segunda parte mostra como calcular a extensão de **C**. Nós iremos confirmar os vetores **A** e **B** para os planos x, y . Nesse caso, a direção para o produto de vetor cross é definida como perpendicular ao plano contendo **A** e **B**. Além disso, a direção de **C** é dada pela *regra do lado direito*: usando sua mão direita, coloque seus dedos na direção de **A** e então curve-os na direção de **B**. Como você realizou essa rotação de **A** em **B**, seu polegar irá apontar na direção do vetor do produto cross, **C**. Um diagrama ajuda. A Figura 7.6 mostra dois vetores, $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. O produto cross pode ser encontrado encontrando-se o ângulo desses vetores feitos com um outro. Uma maneira de

determinar o ângulo é tirar o produto dot, o qual nos permite encontrar o coseno do ângulo entre **A** e **B**.

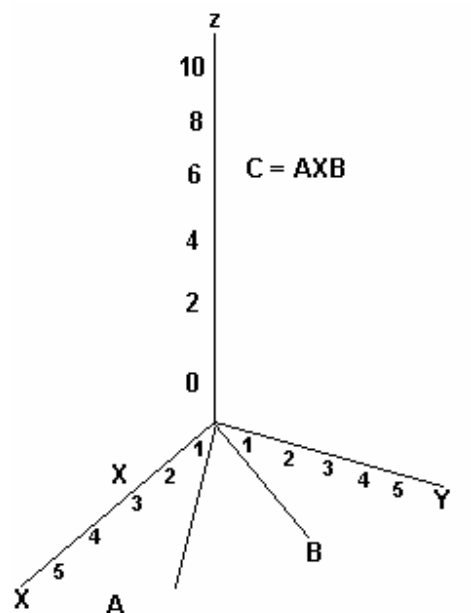


Figura 7.6 O Produto Cross de Dois Vetores

$$A \cdot B = |A||B|\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{(5i + j) \cdot (2i + 2j)}{\sqrt{5^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 2^2}} \quad (7-15)$$

$$\cos(\theta) = \frac{12}{\sqrt{26}\sqrt{8}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{132}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Agora que nós sabemos qual é o $\cos(\theta)$, nós encontramos o $\sin(\theta)$ construindo o triângulo reto baseado nos valores do coseno. A construção mostra que $\sin(\theta)$ é $2\sqrt{13}$, então agora nós podemos registrar o produto cross do vetor(veja Figura 7.7).

$$A \times B = |A||B|\sin(\theta)k$$

$$A \times B = \sqrt{13}\sqrt{22}\sqrt{2} \cdot \frac{2}{13}k$$

$$A \times B = C = 8k$$

Nós temos inserido a unidade de vetor **k** em nossos cálculos, já que nós sabemos que a direção de **C** será ao longo do eixo de *z*. Nós podemos calcular o valor de **C** mais facilmente aplicando as regras para o produto cross da unidade de vetores **i**, **j**, e **k**. Esses vetores são todos ângulos retos; então, nesse caso, $\sin(\theta) = 1$. As direções do produto cross são dadas pela regra do lado direito. Portanto, nós temos as equações

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad (7-16)$$

Você pode verificar mentalmente na Equação 7-16 imaginando a rotação da sua mão direita do primeiro vetor mencionado para o segundo.. O seu polegar irá sempre apontar na direção do resultado.

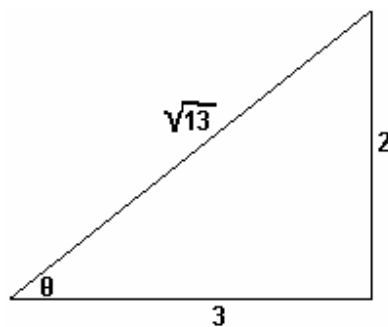


Figura 7.7 Encontrando $\sin(\theta)$ quando $\cos(\theta)$ é conhecido

Agora que nós sabemos como encontrar o produto cross da unidade de vetores, nós podemos encontrar **C** multiplicando os componentes de **A** e **B**.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (5\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \\
 &= 10\mathbf{i} \times \mathbf{i} + 10\mathbf{i} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} \\
 &= 10\mathbf{k} - 2\mathbf{k} \\
 &= 8\mathbf{k} \qquad (7-17)
 \end{aligned}$$

Você deve ficar atento em manter a ordem dos vetores ao realizar as expansões. Já que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}$, troca-se a ordem introduzindo um sinal de menos. Essa pode ser a primeira vez que você encontrou uma regra para multiplicação onde obtém uma resposta diferente se você troca os termos. Nós obtemos o mesmo resultado na Equação 7-17 como na Equação 7-15. Os dois métodos são equivalentes, mesmo quando envolvem cálculos diferentes.

A Lei do Seno

Nós podemos aplicar a regra do produto cross de vetor em três vetores que formam um triângulo; assim iremos encontrar a lei do cosseno. Dessa vez, nós iremos tirar o produto cross em vez do produto dot.

O triângulo na Figura 7.8 pode ser representado por $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Nós iremos seguir a tradição ao desenhar o diagrama. Os lados são designados por letras maiúsculas e os lados dos ângulos opostos são dados pela mesma letra só que minúscula. Nós tiramos o produto dot de **C** com ele mesmo para derivar a lei do cosseno. O que acontece se nós tentamos isso com o produto cross? O ângulo entre **C** e ele mesmo é 0, então o seno é 0 também. *O produto cross de um vetor com ele mesmo é sempre 0.* Nós devemos tentar algo mais se nós quisermos obter uma equação além de $0 = 0$!

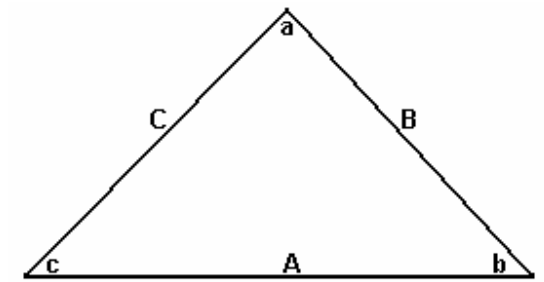


Figura 7.8 Derivação da Lei do Seno

Deixe-nos escrever $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ como antes, mas desta vez tire o produto cross de $\mathbf{A}$ com $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$|\mathbf{A}||\mathbf{C}|\sin(b) = 0 + |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\pi - c)$$

$$AC \sin(b) = AB \sin(c)$$

$$C \sin(b) = B \sin(c)$$

$$\frac{B}{\sin(b)} = \frac{C}{\sin(c)} \quad (7-18)$$

Nós tivemos o surpreendente resultado, na linha 2 da Equação 7 – 18, que o produto cross de um lado(nesse caso, $\mathbf{A}$) com cada um dos outros dois lados produz o mesmo resultado. Disso nós deduzimos que simples resultado na linha 6. Nós temos registrado a extensão de $\mathbf{A}$ por $|\mathbf{A}|$ e por A . Já que A aparece em ambos os lados da linha 4 da Equação 7 – 18, nós podemos eliminá-la. Nós também temos usado o fato de que $\sin(\pi - c) = \sin(c)$.

Não importa qual dos lados nós escolhemos para o produto. Sendo cuidadosos com os nossos ângulos, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \times \mathbf{C} &= \mathbf{B} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\
BC \sin(2\pi - a) &= BA \sin(\pi + c) \\
- C \sin(a) &= -A \sin(c) \\
\frac{A}{\sin(a)} &= \frac{C}{\sin(c)} \quad (7-19)
\end{aligned}$$

Juntando as duas últimas linhas das Equações 7 – 18 e 7 – 19, dê a *lei dos senos de um triângulo qualquer*.

$$\frac{A}{\sin(a)} = \frac{B}{\sin(b)} = \frac{C}{\sin(c)}$$

Exemplo 7 – 6

Encontre todos os lados e ângulos desconhecidos no triângulo da Figura 7.8 se $A = 9.65$ centímetros(cm), $\angle a = 100^\circ$, $B = 5.50$ cm, e $\angle b = 34.0^\circ$.

Solução. Nós usamos a Equação 7 – 20 depois de termos calculado $\angle c$. Já que os ângulos em um triângulo incluem $\angle c = (180 - (100 + 34.0)) = 46^\circ$.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{\sin(a)} &= \frac{B}{\sin(b)} \\
\frac{9.65}{\sin(100)} &= \frac{B}{\sin(34)} \\
B &= \frac{(9.65)(0.5592)}{0.9848} = 5.48 \text{ cm}
\end{aligned}$$

O lado C pode ser encontrado pela mesma técnica. Faça os cálculos e mostre que $C = 7.05$ cm.

A solução para este problema é mais descomplicada se você tentar baseá-lo na definição do produto cross. Os componentes de dois vetores feitos sobre o produto cross não são conhecidos inicialmente; isso requer cálculos extras.

Sua Vez. Encontre todos os lados e ângulos desconhecidos na Figura 7.8 se:

(a) $A = 10.5 \text{ cm}$, $\angle a = 97^\circ$, $\angle b = 33^\circ$

Resposta: _____

(b) $A = 5.5 \text{ cm}$, $\angle a = 60^\circ$, $\angle b = 30^\circ$

Resposta: _____

(c) O que esse triângulo tem de especial?

Resposta: _____

Exemplo 7 – 7: Soluções Simples para o Exemplo 3 – 3

Equipado com essas fórmulas poderosas para resolver triângulos, vamos voltar a um problema que nós encontramos no Capítulo 3. Nós iremos usar a lei do seno para encontrar a altura de um objeto. A Figura 7.9 mostra as medidas. Nós queremos encontrar h .

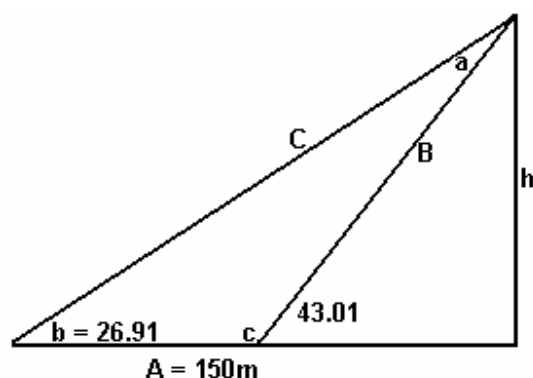


Figura 7.9 Encontrando a Altitude Usando a Lei dos Senos

Você precisa conhecer os ângulos a , b e c para aplicar a lei do seno. O ângulo $a = 43.01^\circ - 26.91^\circ = 16.1^\circ$. porque $c = 180^\circ - 43.01^\circ = 136.99^\circ$.

$$\frac{A}{\sin(a)} = \frac{B}{\sin(b)}$$

$$\frac{150}{0.2773} = \frac{B}{0.4526}$$

$$B = 150 \cdot \frac{0.4526}{0.2773} = 244.8$$

$$h = B \sin(43.01^\circ) = 167.0$$

Nós temos encontrado a altitude pela aplicação da lei do seno. Você deve lembrar-se de que nós estamos aptos a resolver esse problema aplicando as definições das funções trigonométricas do Capítulo 3. Isso pode levar mais alguns passos, mas você pode geralmente resolver um problema de uma maneira direta aplicando as definições fundamentais e os teoremas.

Exemplo 7 – 8: O Ângulo entre Duas Linhas

Encontre o coseno do ângulo entre duas linhas, **A** e **B**, representadas como vetores. Os componentes dos vetores são: **A** = [5, 2] e **B** = [6, 3.5].

Solução. Os passos para a solução usando o Maple são os mesmos do Exemplo 7 – 5. Aqui, nós iremos apresentar uma solução que segue diretamente a Equação 7 – 7: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 30 + 7 = 37$. Para encontrar o produto dot quando você conhece os componentes, multiplique os componentes x e adicione-os ao produto dos componentes y . As extensões de **A** e **B** são encontradas usando a familiar fórmula Pitagoreana uma vez que: $A = 5.385$ e $B = 6.946$. Portanto, $\cos(\theta) = 37/(5.385 \times 6.946) = 0.9892$. Confira esse resultado usando o Maple.

```
> with (linalg);
```

```
> A := vector([5, 2]): B := vector([6, 3.5]): cos(theta) = evalf(dotprod(A, B)/(norm(A, 2)*norm(B, 2)));
```

```
cos (θ) = .9891315765
```

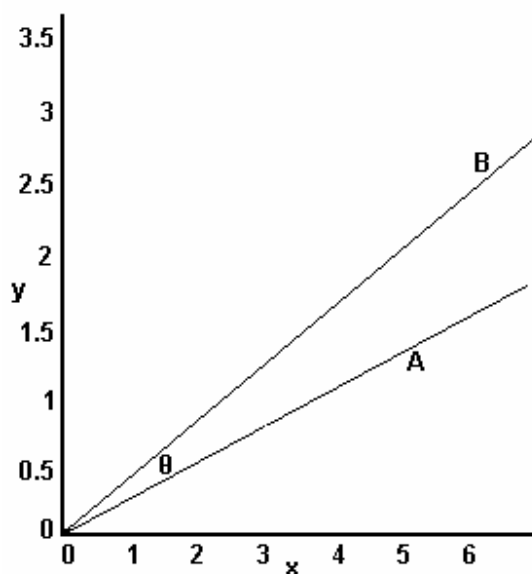
Sua Vez: Conhecendo o cosseno do ângulo, você pode encontrar o ângulo usando a função arccos (Capítulo 9). Encontre o ângulo dessa maneira e meça-o na Figura 7.10.

(a) Qual é o ângulo medido na Figura 7.10?

Resposta: _____

(b) Qual é o ângulo calculado em graus?

Resposta: _____



Lápis e Papel

LP – 1

João está perdido em uma cidade desconhecida, onde todas as construções são do mesmo tamanho. Tentando encontrar um hotel, ele andou 4 (quatro) edifícios ao norte, então girou a leste e andou mais três edifícios. Ainda não tendo encontrado o hotel, ele andou 3 edifícios ao sul e então três edifícios a oeste. Meio desanimado, ele andou 3 edifícios ao sul e um a leste, onde afinal encontrou o hotel.

(a) Rascunhe o caminho à procura do hotel (ele começou em B e terminou em E).

Rascunho:

(b) Descreva o vetor BE , dando sua extensão e direção:

Resposta: _____

LP – 2

Encontre os componentes x e y dos seguintes vetores:

(a) $AB = 10$ em 30°

Resposta: _____

(b) $CD = 42$ em 60°

Resposta: _____

(c) $EF = 75$ em 90°

Resposta: _____

(d) $GH = 163$ em 180°

Resposta: _____

(e) $IJ = 5\sqrt{2}$ em 225°

Resposta: _____

LP – 3

Dados os componentes x e y , determine a extensão e a direção do vetor:

(a) $AB_x = 30, AB_y = 40$

Resposta: _____

(b) $CD_x = 5, CD_y = 37$

Resposta: _____

(c) $EF_x = 3, EF_y = -4$

Resposta: _____

(d) $GH_x = -10, GH_y = 0$

Resposta: _____

(e) $IJ_x = 0, IJ_y = -43$

Resposta: _____

LP – 4

Adicione os seguintes vetores. Afirme suas respostas como uma extensão e uma direção:

(a) 10 em $30^\circ + 15$ em 90°

Resposta: _____

(b) $\sqrt{5}$ em $63^\circ 43' + \sqrt{5}$ em $26^\circ 56'$

Resposta: _____

(c) $5 \text{ em } -60^\circ + 5 \text{ em } 60^\circ$

Resposta: _____

(d) $2 \text{ em } 45^\circ + 2 \text{ em } 90^\circ + 2 \text{ em } 135^\circ + 2 \text{ em } 180^\circ + 2 \text{ em } 225^\circ + 2 \text{ em } 270^\circ + 2 \text{ em } 315^\circ + 2 \text{ em } 360^\circ$

Resposta: _____

(e) $\sqrt{2} \text{ em } 45^\circ + \sqrt{2} \text{ em } 135^\circ + 2 \text{ em } 90^\circ$

Resposta: _____

LP – 5

Avalie os seguimentos:

(a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} = 10\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Resposta: _____

(b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} = 10\mathbf{i}$ e $\mathbf{B} = 13\mathbf{j}$

Resposta: _____

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} = 10 \text{ em } 45^\circ$ e $\mathbf{B} = 10 \text{ em } 45^\circ$

Resposta: _____

(d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} = 10 \text{ em } 0^\circ$ e $\mathbf{B} = 10 \text{ em } 90^\circ$

Resposta: _____

(e) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} = \sqrt{3} \text{ em } 30^\circ$ e $\mathbf{B} = 2/3 \text{ em } 0^\circ$

Resposta: _____

LP – 6

Verdadeiro ou Falso?

(a) Se $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, é $Cx = Ax + Bx$?

Resposta: _____

(b) $|\mathbf{i} + \mathbf{j}|$ é igual a $\sqrt{2}$?

Resposta: _____

(c) $|\mathbf{i} - \mathbf{j}|$ é igual a $\sqrt{2}$?

Resposta: _____

(d) $|\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}|$ é igual a 1?

Resposta: _____

(e) $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| \cdot |\mathbf{i} - \mathbf{j}|$ é igual a 2?

Resposta: _____

LP – 7

Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, e $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$, encontre o coseno do ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

Resposta: _____

LP – 8

Se $\mathbf{A} = 5\mathbf{i}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{i}$, encontre $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

Resposta: _____

LP – 9

Se $\mathbf{A} = 5\mathbf{i}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{j}$, encontre $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

Resposta: _____

Laboratório Maple

LM – 1

Dados os dois lados de um triângulo $A = 14.7i$ e $B = 12.3$ em 57° :

(a) Encontre o terceiro lado, C . Dica: carregue o pacote linalg e coloque esses comandos:

> A := vector([14.7, 0]); (Defina A como um vetor)

> B := vector([12.3*cos(57), 12.3*sin(57)]); (Observe Sen e Cos, as funções de grau definidas no Prelúdio do Maple, página 21)

> C := evalm(A + B); (Adicione os vetores)

Afirme porque essa é uma solução para encontrar o terceiro lado do triângulo ABC :

Resposta: _____

(b) Encontre o lado C usando a lei do cosseno:

> sqrt(14.7^2 + 12.3^2 + 2 * 14.7 12.3 * Cos(57); (Aplique a lei do cosseno diretamente)

Resposta: _____

Observe que esse último método não dá a direção do vetor C sem trabalhar desnecessariamente. Se C é visto como apenas o lado de um triângulo, ela dá uma direção. C tem apenas uma extensão, C tem extensão e direção.

LM – 2

Dado o triângulo na Figura 7.11, encontre o terceiro lado, C , usando a lei do coseno.

(a) designe direções para $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ como mostra o diagrama. Expresse $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como vetores:

Resposta: $\mathbf{A} =$ _____

Resposta: $\mathbf{B} =$ _____

(b) Qual o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$? Resposta: _____

(c) Escreva o comando Maple para avaliar C ? Resposta: _____

(d) Qual o comprimento de C ? Resposta: _____

(e) Solucione C por adição de vetores. Defina $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como

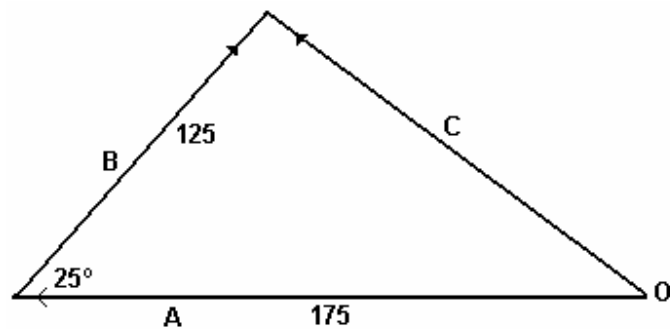


Figura 7.11 Diagrama para o Problema LM7 –2

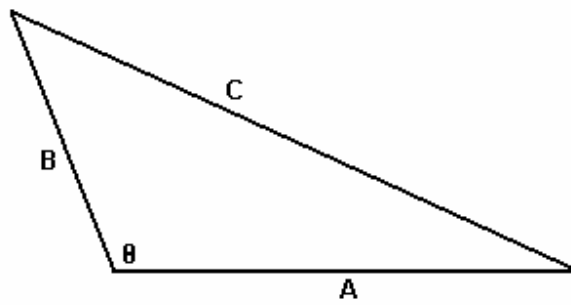


Figura 7. 12 Diagrama para Problema LM7 – 3(a)

> A := vector([Ax, Ay]); (Coloque os valores apropriados para Ax, Ay)

> B := vector([Bx, By]); (Coloque os valores apropriados para Bx, By)

> C = A + B;

Resposta: _____

LM – 3

Usando o método do problema LM7 – 2, solucione os triângulos nas Figuras 7.12 e 7.13 para os seus terceiros lados:

(a) A = 55, B = 32, $\theta = 105^\circ$

Resposta: _____

(b) A = 15, B = 25, $\theta = 80^\circ$

Resposta: _____

LM – 4

Dado o triângulo na Figura 7.13:

Solucione c , a e C . Entenda que as outras quantidades são conhecidas.

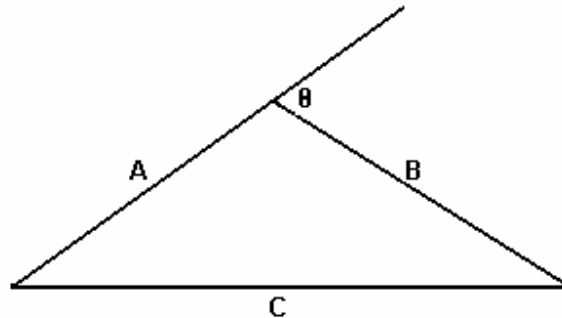


Figura 7.13 diagrama para o problema LM7 – 3 (b)

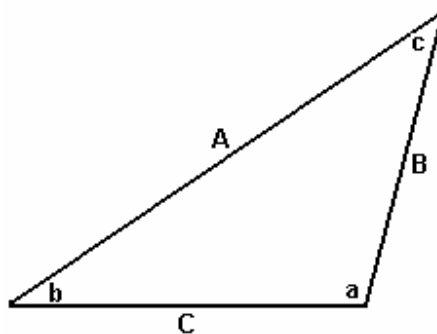


Figura 7.14 Diagrama para o Problema LM7 – 4

(a) Use a lei do seno para calcular c :

$\sin 2 := C/\sin(c) = B/\sin(b)$; (Observe o uso da função Seno. Nós estamos aptos a usar graus para b e c .)

$$sr2 := \frac{C}{\sin(.01745329252c)} = \frac{B}{\sin(.01745329252b)}$$

> e74 := subs(B = 20, C = 18, b = 37, sr2);

$$e74 := 18 \frac{1}{\sin(.01745329252c)} = 20 \frac{1}{\sin(.6457718232)}$$

> solve(e74, {c});

$$a := 110.21$$

(b) Use a lei do cosseno para resolver o lado A:

> A :=sqrt(B^2 +C^2 + 2*B*C*Cos(a));

(c) Solucione A substituindo os valores para B, C e a:

>; (escreva os comandos Maple aqui) _____

>; _____

>; _____

Respostas: c = _____

a = _____

A = _____

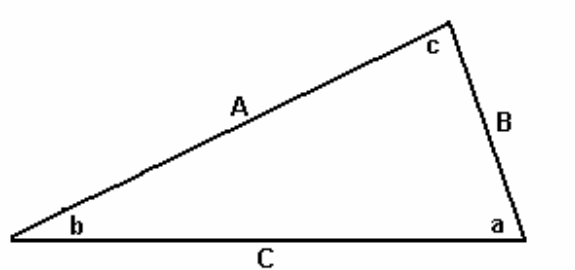


Figura 7.15 Diagrama para o Problema LM7 – 5 (a)

LM – 5

Use o método do problema LM7 – 4 para solucionar os triângulos nas Figuras 7.15 através da 7.17:

(a) Veja a Figura 7.15. $A = 8$, $b = 4$, $a = 45^\circ$

>; (escreva os comandos Maple aqui) _____

>; _____

>; _____

Respostas: $b =$ _____

$c =$ _____

$C =$ _____

(b) Veja a Figura 7.16. $A = 5.8$, $B = 5.8$, $b = 15^\circ$

>; (escreva os comandos Maple aqui) _____

>; _____

>; _____

Respostas: $a =$ _____

$c =$ _____

$C =$ _____

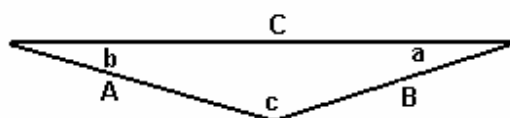


Figura 7.16 Diagrama para o Problema LM7 – 5(b)

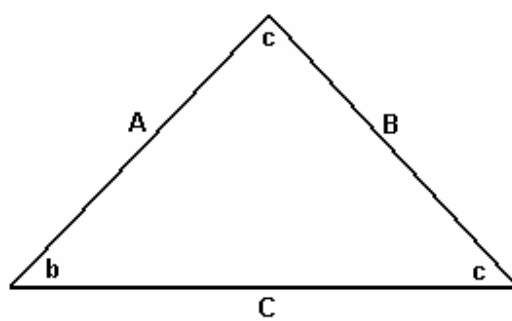


Figura 7.17 Diagrama para o Problema LM7 – 5(c)

(c) Veja a Figura 7.17. $B = 53.5$, $A = 48.2$, $b = 57^\circ$

>; (escreva os comandos Maple aqui) _____

>; _____

>; _____

Respostas: $a =$ _____

$c =$ _____

$C =$ _____